

## CAPÍTULO XI

### Experiencias de estudiantes en formación inicial para descubrir los aprendizajes de la geometría mediante el papalote

Gerardo Gabriel García Castrejón  
Carlos César Cruz Arizmendi  
María de Lourdes Santana Salgado

#### Resumen

El objetivo es describir el proceso que siguen los estudiantes en formación para que los niños y niñas de quinto y sexto grado de educación primaria de Acapulco, Coyuca y Técpan de Galeana del estado de Guerrero descubran el aprendizaje de la geometría mediante la elaboración de la culebrina o papalote. El "Estudio de Clase" es la metodología que posibilita la conformación de un grupo de interés, donde se aprende y se enseña en diálogo entre iguales. Se utilizaron informes, observaciones y entrevistas de estudiantes y profesores para triangular la información. Entre los hallazgos se encuentra el reconocimiento de la contextualización de saberes como parte de la práctica situada en el que identifica las condiciones de los alumnos, de la escuela y comunidad para relacionar con las características de las propiedades geométricas: puntos comunes, magnitudes, intersecciones, lados y figuras congruentes o semejantes. Se muestran las implicaciones de la planificación en la construcción de nuevas formas del pensamiento desde la intuición a la formulación, lo que facilita la recuperación de las experiencias de los estudiantes en formación inicial en relación con sus reflexiones. Además, se identifican algunos perfiles cognitivos de los estudiantes: creativo con la imaginación y construcción; analítico y sintético identifica, separa y acomoda las figuras inscritas en la culebrina; y descriptivo, nombra y explica de acuerdo con las propiedades geométricas.

**Palabras clave:** Papalote, pensamiento geométrico, práctica docente, formación inicial.

## Abstract

The objective is to describe the process followed by student teachers to help fifth and sixth grade elementary school children in Acapulco, Coyuca and Técpan de Galeana, Guerrero, discover geometry through the creation of kites. Lesson study is the methodology that facilitates the formation of groups of students who share an interest in learning and teaching, where peer dialogue takes place. Reports, observations and interviews with students and teachers were used to triangulate the information. Among the findings is the recognition of the contextualization of knowledge as part of the situated practice in which the conditions of the students, the school and the community are identified to relate it to the characteristics of the geometric properties: common points, magnitudes, intersections, sides and congruent or similar figures. The implications of planning in the construction of new ways of thinking from intuition to formulation are shown, facilitating the retrieval of the experiences of teachers in relation to their reflections. In addition, some cognitive profiles of students are identified: creative with imagination and construction; analytical and synthetic, identifying, separating and arranging the figures inscribed in the culverin; and descriptive, naming and explaining according to Geometric properties.

**Keywords:** Kite, geometric thinking, teaching practice, initial training

## Introducción

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ocupa un lugar central debido al desarrollo del pensamiento lógico y analítico que, son esenciales para enfrentar desafíos complejos tanto dentro como fuera del entorno educativo. Los estudiantes en formación docente matemática desarrollan su pensamiento geométrico por medio de su creatividad, por ello apelamos al estudio de cuerpos geométricos. Ésta se encuentra en el estudio de cuerpos geométricos inscritos en un problema en el cual se integra un artefacto para el estudio, así cuerpos geométricos, problema, artefacto y saberes del contexto del estudiante se estructuran para generar un estado cognitivo donde el sujeto aprende y su pensamiento geométrico es expuesto y aplicado en la resolución de un problema práctico.

El pensamiento geométrico tiene una estrecha relación con la estructura

de ideas y la relación con el objeto de estudio, un objeto geométrico como la culebrina (Campo-Meneses y García-García, 2021). Ideas empíricas y teóricas se integran en la búsqueda de representaciones conectadas con las formas descritas en la estructura de la culebrina, para identificar las figuras inscritas (Douady, 1986). La aplicación de operaciones mentales ligadas a las primeras representaciones del sujeto le movilizan un conjunto de ideas para alcanzar una nueva forma de acomodar el objeto, inmóvil éste, pero, adquiere movilidad en las ideas del sujeto (Oktaç, Trigueros y Vargas, 2006). Así el pensamiento se convierte en un filtro de ideas reales que ya poseen y fueron experimentadas en lo cognitivo y en lo empírico y, con esta serie de operaciones se describen procesos integrados por operaciones con un propósito común, para describir de manera procedimental cómo fue la construcción de la culebrina y, después en su análisis de evaluación describir nuevas propiedades que no habían sido identificadas (Parraguez y Oktaç, 2010).

Las estructuras cognitivas se exploran de manera creativa construyendo momentos donde las ideas, imaginación, creatividad, curiosidad se acomodan en torno a sus saberes donde las experiencias se reestructuran alcanzando una nueva experiencia. (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008; Duval, 2006). La base cognitiva de la creatividad, el estudiante la descubre por medio de la aplicación que hace del artefacto (Rabardel, 1995), como el caso de la culebrina, para identificar en él una serie de propiedades geométricas desde su imaginación y aproximadas por sus ideas. (Trigueros y Oktaç, 2005). Cada propiedad se asocia con un momento de experiencia ocurrido y con una nueva idea generada por el problema en turno, así el artefacto advierte la incidencia de nuevas intenciones del sujeto que, con éstas le modificará su estructura como un simple objeto que está siendo experimentado como artefacto matemático por medio de la creatividad gestada en el pensamiento del estudiante (Dubinsky y McDonald, 2001; Dubinsky, 1996). En determinado momento la creatividad como un estado cognitivo del estudiante y el artefacto encuentran la pausa donde se analiza lo realizado para generar una nueva forma del pensamiento sobre el problema y el artefacto, descubriendo que en el artefacto existen elementos no pensados y no identificados sino hasta la acción cognitiva del sujeto, dando paso a renombrar el artefacto como un instrumento, porque su forma simple ahora agregó otros elementos cognitivos existentes en el pensamiento del futuro docente. (Roa, 2008; Artigue, 2002; Rabardel, 1995).

El objetivo es analizar las experiencias de los estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza Aprendizaje de las Matemáticas (LEAM) de cuarto semestre en el Centro de Actualización del Magisterio de Acapulco relacionada con el desarrollo del pensamiento geométrico mediante la elaboración de la culebrina o papalote en quinto y sexto grado de educación primaria en Acapulco, Coyuca y Técpan de Galeana, del estado de Guerrero.

Por lo anterior, se asume el estudio de clase (Benavides y Calvache, 2013) como hilo conductor que experimenta, modela en comunidad las formas de pensar en matemáticas, contribuyendo en las formas de cómo el objeto matemático de conocimiento incide en la flexibilidad de la construcción de los conocimientos compartidos en diversos espacios tanto físicos o virtuales que experimentan los estudiantes en la indagación y reflexión de las prácticas profesionales a compartir sus experiencias investigativas.

Asumimos la propuesta teórica de Marmolejo y Moreno (2019) en referencia a la importancia de construir propiedades geométricas en el contexto escolar, es la producción de actividades orientadas de la intuición a la formalización enfatizando la formación de conjeturas, como propiedades que son ciertas en la matemática, pero nuevas para el estudiante y se pueden validar plausiblemente.

## **Desarrollo**

La experiencia que se presenta es una investigación en proceso, que tiene como marco para el aprendizaje las formas características del pensamiento geométrico desde la perspectiva de Leontiev en la (Teoría de la Actividad) derivada de las concepciones de Lev Vygotsky (Teoría socio histórico-cultural del desarrollo cognitivo) que a su vez por muchos de sus aspectos, constituye una teoría histórica del desarrollo individual y desarrolladas por Galperin (1992), del que recuperamos la teoría de la formación por etapas de acciones y mentales, en la que se destaca que las acciones constituyentes de una actividad transcurren de manera ordenada, a partir de la formación de una base de orientación de la acción, formación del aspecto material de la acción (con objetos concretos o con una representación condicional), formación de su aspecto verbal externo, y formación de esta acción como un acto mental a través del lenguaje interiorizado.

Talízina (2002) menciona la teoría del control voluntario, coincidente con Galperin en que la actividad marca la transición de la fase materializada generalizada evitando la automatización de la acción, para ello se recomienda promover la verbalización de lo operado en la primera fase formulando con el habla, lo que se esté realizando en la práctica de manera material. La siguiente fase de formación del aspecto verbal externo de la actividad, proporcionando en su justificación argumentos (probablemente débiles) en la caracterización esencial del objeto matemático, describiendo el significado de las representaciones idealizadas a partir de su materialización y orientando ahora la generalización del proceso en tres cambios esenciales: la acción verbal se estructura no solo como un reflejo real de la acción realizada con el objeto, sino también como una comunicación verbal de la misma; el objeto matemático se constituye en la base de la acción, eliminando de esta forma las limitaciones que el objeto presenta; y la asimilación de la forma verbal se observa por el habla, la cual se convierte en la portadora de todo el proceso, puesto que no solo implica la comprensión de las palabras empleadas, sino además de ello conllevan el contenido de la tarea y de la acción.

La etapa de interiorización de la acción como un acto mental implica que la comunicación es con el habla para sí suscitando de este modo la reflexión consciente, sobre las condiciones de caracterizar al objeto matemático y la mejora de los argumentos, generando enunciados lo más próximo en un lenguaje propio de la disciplina (su formalización).

Desde la perspectiva teórica de estos autores, Marmolejo y Moreno (2019) plantean que el proceso docente educativo transcurre de manera ordenada, destacándose las funciones didácticas de aseguramiento de partida, con la nueva materia, un contenido matemático durante la enseñanza, así, con fundamento en la teoría de la actividad arriba descrita, proponen para la planificación de secuencias didácticas el diseño de actividades específicas para cada momento didáctico, a saber:

Aseguramiento de partida, es el momento previo en el que se garantiza si los estudiantes poseen los saberes y habilidades necesarias para acceder a la nueva materia que se ofrezca para su aprendizaje, para ello, la o el docente se cerciora mediante actividades específicas, o también mediante un cuestionario oral o escrito preguntando y en su caso reactivando el conocimiento mediante actividades, percatándose que los saberes no

se constituirán en obstáculos durante el trabajo, se realiza definiendo claramente la intención didáctica que se tiene y que será la guía para el diseño de las actividades constitutivas de la secuencia didáctica; en tanto que la función didáctica trabajo con la nueva materia, toma forma con el conjunto de actividades propuestas y dispuestas progresivamente; así la teoría de la actividad se refleja en los denominados momentos didácticos: Apelando a la intuición y observación; hacia la visualización dinámica, y hacia la formalización.

Apelando a la intuición y observación, refiere a la etapa materializada, poniendo en juego la experimentación, la búsqueda de regularidades, patrones y relaciones, para identificar las características esenciales que permiten el establecimiento de conceptos y relaciones propias e implícitas de la propiedad que se construye, que mediante el habla los estudiantes enuncian con argumentos de naturaleza inductiva, describiendo el proceso que les llevó a concluir que tal propiedad es cierta ya que se verifica plausiblemente en casos particulares.

Hacia la visualización dinámica, es el momento didáctico orientado a generalizar lo concluido en la etapa anterior, y que ahora usando recursos analógicos y tecnológicos, se dinamiza la acción materializada por la movilidad, así, la idea de generalización propicia la maduración de los argumentos estableciendo que dicha propiedad es para todo objeto matemático del que se trate, enfatizando por la o el profesor que a pesar de ello se trata de una verdad establecida plausiblemente, que si bien tal saber es producto del consenso entre alumnos, en efecto es verdadero en la ciencia matemática, y que en ella está presente el proceso que da operatividad a toda propiedad matemática, generalizando los saberes descubiertos por los estudiantes. Es la observación intencionada la fuente del crecimiento cualitativo de los argumentos, pues por medio de la visualización según Arcavi (2003) citado por Marmolejo y Moreno (2019), esta es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre imágenes en nuestras mentes en el papel (material concreto) o herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas.

Hacia la formalización, este tercer momento didáctico, se inicia con el resultado generalizado en el momento anterior, el cual constituye

el saber construido y validado plausiblemente, implicando ahora el razonamiento deductivo, diseñando para la secuencia didáctica las actividades específicas que orientadas progresivamente permitan la producción lógico-deductiva en que el saber anterior toma la forma de teorema formalmente demostrado. El proceso secuencial, de nuevo inicia con la verificación del conocimiento por el alumno, conceptos, relaciones o propiedades que serán necesarias para el proceso demostrativo (en el contexto escolar), como antes se reactiva lo necesario, por lo que la secuencia de actividades se direcciona deductivamente hacia obtener la propiedad matemática ahora ya formalizada.

## **Metodología**

La metodología Investigación-acción, como el proceso de análisis y reflexión sugerida por Latorre (2004) desde una postura ontológica (el debe ser de la práctica), deontológica (el cómo es mi práctica) y el metodológico (qué debo hacer para mejorar mi práctica y con qué elementos cuento para hacerlo).

La ubicación del estudio se determinó en un espacio y un tiempo determinado, en este caso con los estudiantes de cuarto semestre LEAM de la generación 2024-2026, en una escuela formadora de docentes de Acapulco, Guerrero que promueve el aprendizaje de los saberes disciplinares propios de la geometría que se ponen en práctica profesional de 20 estudiantes. Así como tres docentes de matemáticas y dos de psicopedagogía. La disposición de la academia permite el desarrollo adecuado del programa curricular centrado en la formación docente matemática. Los estudiantes cuentan con celular, laptop, computadora de escritorio, internet en la escuela y en casa.

Es importante identificar y reconocer los elementos que permiten abordar el desarrollo del estudio de clase para diseñar actividades que fortalezcan elementos de evaluación, análisis y solución de problemas diversos en su vida académica y profesional en la descripción de eventos y comportamientos durante este periodo.

Se inició recuperando la experiencia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por lo que se planteó el acercamiento al trabajo de metodologías activas en la construcción de un artefacto de la culebrina

con el uso y costumbres para descubrir la geometría en los grupos de sexto grado de primaria.

Durante dos meses los días miércoles, se estuvo trabajando en equipo en la construcción de conocimiento pedagógico y didáctico, sobre el diseño, ejecución, seguimiento y evaluación del plan de clase – taller- conjunto, la aplicación con los alumnos de sexto grado de primaria y la valoración fue procesual donde se triangula la información que proviene de informes de los estudiantes, observaciones de profesores y entrevistas para construir de manera dialéctica la didáctica y pedagógica en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el diseño del plan de clase, se acordó utilizar la teoría de Marmolejo y Moreno (2019) sobre las actividades orientadas de la intuición a la formalización, enfatizando la formación de conjeturas para que el estudiante normalista valide plausiblemente las características de las propiedades geométricas: puntos comunes, magnitudes, intersecciones y lados congruentes o semejantes. Además, de que desarrolla la unidad cognitiva argumentar-conjeturar – demostrar.

A continuación, se presenta la secuencia didáctica para el aprendizaje de las propiedades geométricas elaborada por Maestros y estudiantes durante tres clases de dos horas:

**Momento didáctico:** “Apelando la intuición y la observación”

**Intención didáctica:** Con un dibujo, los estudiantes diseñan el prototipo a construir y nos darán su primera descripción del artefacto, nombran a su culebrina (categorías/clasifiquen) y se organizará el trabajo por equipos.

*Nota al profesor:*

*\*Activar tu grabadora de audio individual.*

*\*Activar video.*

*\*Tomar fotos regularmente (de atrás hacia adelante)*

Introducción: Presentación de las y los talleristas.

Venimos del CAM Acapulco, estamos estudiando para ser profesores de Matemáticas.

Vamos a construir con ustedes una culebrina y vamos a aprender matemáticas con ello.

*Trabajo individual:*

Dibuja en la hoja la culebrina que vas a construir, y asignarle un nombre a tu diseño. (3 min.)

Es importante que su hojita no la hagan como chicharrón, es decir, que no se maltrate la hoja.

¿Por qué nombraste así tu culebrina? y ¿qué características tiene? (5 min.)

En la parte de atrás de tu dibujo vamos a escribir un GLOSARIO, con la intención de tener listados los conceptos que estamos trabajando.

*Nota al profesor: Se espera que digan los alumnos: (Piñata, Rehilete, 50-50, Molino, Umbrella, Flor, Tuerto, Estrella, Paracaídas, Trébol de tres hojas, Estrella de 6 picos, Solitaria, Arcoíris, Cielo, policromático, Ajedrez, Bandera de México) Propiciar que todos los alumnos tengan una figura simple (triángulo grande, trapecio arriba-abajo bicolor).*

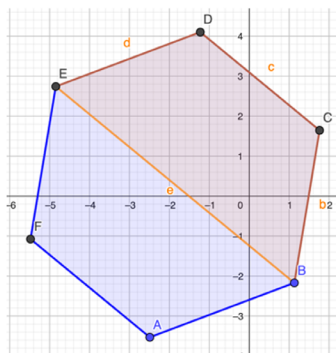
¿Cómo lograron ese diseño?

*Nota al profesor: Nos van a dar sus argumentos...(verbal) (esperamos que nos digan que se forman triángulos, hexágonos, trapecios y rombos) ustedes recuperen el audio para hacer la transcripción.*

¿Qué porcentaje ocupa el color o los colores de la culebrina que diseñaron?

¿En qué condiciones se dan?

*Pueden poner el ejemplo siguiente: 50%-50%*



*Nota al profesor: Verificar que los porcentajes suman 100.*

Trabajo colaborativo

Ahora pueden integrarse quienes tienen un diseño **semejante** por la forma de su culebrina...

Nota al profesor: Van a decir, semejante color, tamaño, por figuras interiores.

¿Por qué te reuniste con tu compañero o compañera?

¿Qué tienen de semejante sus diseños?

Nota del profesor: "Asociar a los de la culebrina solitaria con alguien de otro diseño con pocos participantes".

¿Te gustaría integrarte a Oscar con Daniela, pero con otras características?

Hacer equipos equilibrados.

**Momento didáctico: "Visualización Dinámica y Generalización"**

**Intención didáctica: Manos a la obra, construyamos las culebrinas según su diseño.**

Seguimos en equipos:

Preguntar a los estudiantes:

¿Alguien sabe cómo construir una culebrina?

¿Tú nos ayudas?

Al primer niño o niña:

Y ¿cómo empiezo? ¿qué tengo que hacer?

(Tomar 2 varillas para hacer una X.)

¿Voy a hacer una X y la voy a amarrar por el centro?

¿Qué pasaría si una varilla es más grande que las otras?

Nota al profesor: ("quedaría deforme, chueca")

¿Cómo le harías para que sean del mismo tamaño? "juntan y cortan las varillas (esto NO)"

El maestro: Hacer una **comparación** (sillas, cuadernos, libros, lápices, ventanas, puertas, llaves que usamos, lentes, tamaño de los salones, botes de agua, mochilas capacidad de carga, celulares, monedas, juegos geométricos,

¿todos los chetos son iguales?

de dos alumnos para determinar su tamaño. (se elegirán tres alumnos al azar miden por su estatura e iremos buscando con otros alumnos para que sean del mismo tamaño) *Concepto de semejanza*

¿Cómo ocupamos el ejemplo que vimos para las varillas? (*cambiando los objetos por las varillas*)

Ya que cada uno tenga sus varillas, que el alumno siga explicando el procedimiento. (*ya que tenemos las varillas iguales, con el hilo amarramos el centro, buscamos el centro de la varilla*)

¿Cómo sé que es el centro?

Una demostración de la *báscula* o *balanza*.

Pregunta: ¿Qué pesa más un kilo de tornillos o un kilo de tortilla?). ¿Por qué?

*Nota al profesor: van a responder que el de tornillos.*

Una demostración de la *báscula* o *balanza*. Si tenemos el mismo peso, pues la balanza no se inclina, pero si pesa más esta se inclina.

¿Qué pasa si no tengo nada en la balanza?

*(no sé, se inclina, no se inclina)*

No se debe inclinar, entonces cuando vemos que la balanza no se inclina, ya tenemos el centro equilibrio.

*Nota al profesor: Experimentalmente ejemplificar cómo lo hace una báscula se enfrenta uno a que en cierta parte de la varilla tenga una composición de su materia más densa que en otra parte, lo cual el centro geométrico (punto medio del segmento) puede variar significativamente.*

Veamos la forma que los alumnos justifiquen el **centro de la varilla** (punto medio de un segmento) con la medición (pero no aquella que está dada por algún instrumento como la regla graduada)

Introducir el concepto de **ángulos**.

¿Qué representa esta abertura para ustedes?

*Nota la profesor: Ejemplificar con 2 varillas perpendiculares*

Cuando la abertura entre las varillas es de 90 grados, se dice que las líneas son perpendiculares

¿Qué se observa de los 4 ángulos que forman estas 2 varillas?

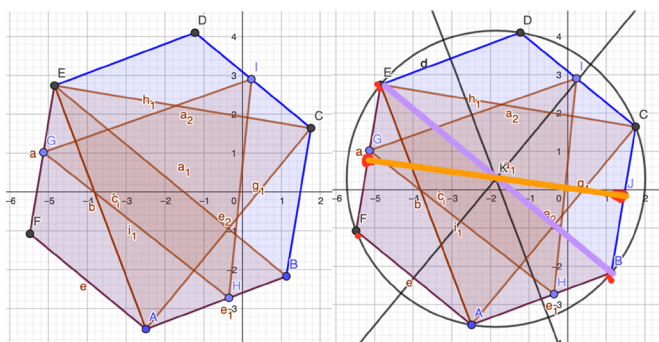
Los ángulos son iguales, forman 4 ángulos de 90 grados.

Con una tercera varilla se forma algo así: -X- (construcción de la estructura de la culebrina). Se empiezan a amarrar las varillas hasta que quede firme el hexágono. "ahora que tienes el hilo de un vértice hacia el centro"

¿Qué tipo de figuras generaste al interior del hexágono?

¿Cuántos trapezios construiste?

¿Cuántos triángulos de diferentes tamaños formaste? -Isosceles, Escaleno, Rectángulo, Equilátero



Nota al profesor: dependiendo de las respuestas del grupo valorar si se les pregunta cuál es el triángulo de mayor área que se puede construir en el hexágono.

¿Cuáles de estas figuras son semejantes?

"triángulos, trapezios, hexágonos, cuadrados, rombos"

Introducción la idea de una circunferencia imaginaria cuyo centro son los puntos medios de las varillas. Sería colocar la culebrina y con un plumón marcar los vértices de la culebrina para que así se forme la circunferencia imaginaria, decirle ¿Qué se formaría si uniéramos los puntos?

"Un círculo o circunferencia".

¿Cómo se forma el hexágono regular?

¿Qué haríamos para que todos los vértices del hexágono estén a la misma distancia? "Del centro hacia sus vértices".

Pegar el papel china en el esqueleto estructura/modelo

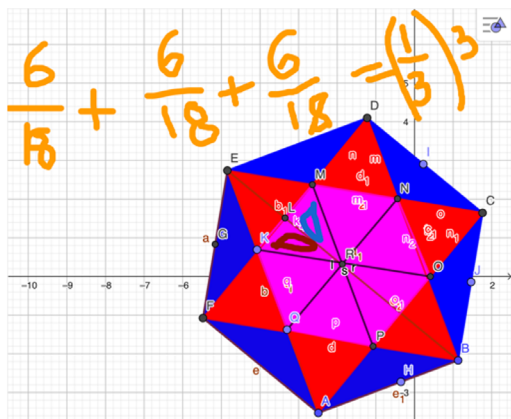
### Cada uno de ya a construir su culebrina

#### Momento didáctico: "Hacia la formalización"

¿Qué porcentaje ocupa el color o los colores de la culebrina que diseñaron?

¿En qué condiciones se dan?

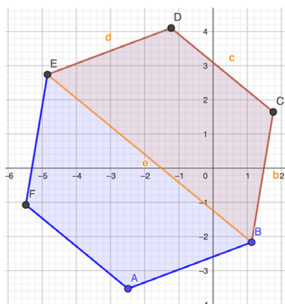
Argumenta tu respuesta...



Nota al profesor: Los alumnos podrían describir donde se pueden utilizar los conceptos que vimos.

Conceptos:

- Simetría
- Comparación.
- Semejanza.
- Porcentaje.
- Radio.
- Punto medio.
- Circunferencia.
- Hexágono Regular e Irregular.



Los equipos pasan a explicar con sus palabras la construcción y definición de los conceptos utilizados. Evidencia de los equipos

*Muestran su GLOSARIO...*

Recursos didácticos: Varillas de madera, Papel China, Hilo de coser, Zazanil o Resistol blanco, Tijeras, Bolsa de plástico para forrar, Hojas blancas (2 por persona), Lápices de colores, Grabación de audio, fotografías de las actividades

### **Algunos hallazgos**

*Planificar ayuda la construcción de nuevas formas del pensamiento*

La construcción de nuevas formas estructurales del pensamiento geométrico del estudiante ha creado un instrumento a partir de un artefacto. La culebrina como artefacto movilizó las ideas, supuestos, creencias, saberes y demás elementos propios del futuro docente, en proporción a sus nuevos conocimientos analíticos, éstas se han adquirido desde el momento de aproximarse a otras considerar la existencia de otras propiedades del artefacto. Esta aproximación se observa en el siguiente fragmento donde reflexiona sobre la importancia de la experiencia laboral, la aplicación de la secuencia didáctica y objetivo de las prácticas profesionales con la planificación:

Explicación lenta y confusa tanto de mis compañeros y mía hacia los alumnos provoca retraso. no introducimos algunos conceptos y apartados esenciales de la planeación (IJ1/17/03/2024)

A la planeación le hicimos varios cambios ya que las actividades llevaron más del tiempo estimado para cada una, tampoco los nombres de las culebrinas no fueron las esperadas ya que no la nombraban por su diseño sino con algo que les gustara. No hicimos varias actividades como el preguntar cómo lograron su diseño, que porcentaje ocupa cada color, las figuras que hay dentro del hexágono (IG2/14/04/2024).

Éstas se construyen en un proceso analítico, de separación, el sujeto integra el problema con todos los elementos inscritos en él, creando una serie de relaciones diferentes a las expuestas de manera explícita en el problema y cómo lo desarrolla. El uso de enfoques visuales y manipulativos de la culebrina articulado con la metodología de la Intuición a la formalización en la planificación, permitieron simplificar

y resolver problemas al vincular propiedades, datos y otros elementos del problema de una manera que no se logra ver cuando se está muy cerca del problema, incluso dentro del problema, las experiencias de los estudiantes exponen la necesidad de salir del problema, tomar una distancia apropiada para poder identificar cada una de las partes, sus elementos y propiedades y en ello reconstruir una geometría alterna, es decir, se ha construido una geometría desarrollando un pensamiento geométrico.

La aproximación visual y manipulativa fomenta un ambiente de aprendizaje dinámico y colaborativo, donde los estudiantes podían experimentar y aprender de sus errores en un entorno seguro, Sin embargo, los estudiantes exponen cómo forma de trabajo:

una explicación general que consistía en una serie de pasos a seguir para el desarrollo de la culebrina mediante ejemplos dibujados en el pizarrón con ayuda de los marcadores o agarrando las varillas para utilizarlo como material manipulable y que represente el paso que se quiere dar a entender, pero esta serie de pasos no es lineal; se preguntó a los alumnos lo que ellos en su lugar harían y con esa idea la desarrollamos (IJ1/17/03/2024)

Al plantearse desde plano intuitivo hasta un plano formal, los alumnos mostraron la capacidad de pensar y de ir descubriendo los conceptos con la guía del docente para crear actividades interesantes acorde a los saberes matemáticos y no tener la separación del dato y una propiedad de la culebrina, una perspectiva donde la forma geométrica ha cambiado por la óptica lejana.

Las bases cognitivas analíticas tienen una relación que es evidenciada por los estudiantes en sus soluciones a problemas matemáticos. Expresan una descomposición geométrica del artefacto existente como un estado cognitivo del perfil sintético del sujeto, cuando le pregunta:

Si el punto medio de las varillas, los porcentajes de cada color, la igualdad entre las varillas para obtener un hexágono perfecto y descubrir si dichos triángulos son isósceles o equiláteros, retomando este apartado se vio demasiado las figuras geométricas por la razón de la construcción de las figuras del proyecto, así como; el dibujo

que se hizo anteriormente en el cual se utilizó como referencia a la realización de la culebrina (IJ/17/03/2024).

Mientras otro alumno responde:

congruencia al momento de medir las varillas, vimos semejanza al momento de unir a los estudiantes en equipos por el diseño de su culebrina, también vimos los tipos de triángulos y si alguno veía esos triángulos dentro de su culebrina, trabajamos área de un triángulo al momento de medir un triángulo con la regla y dejamos un ejercicio sobre ello con medida que nosotros les dimos. (IG2/14/04/2024)

El pensamiento analítico descompone a la culebrina como artefacto y le convierte en un instrumento, éste existe en relación directa con el pensamiento sintético porque es el que construye la forma matemática del instrumento, quedando oculto el artefacto, éste no desaparece, porque su existencia le da vida al instrumento a la estructura sintética del pensamiento del estudiante para acomodar el problema en su totalidad, en una estructura diferente objetiva y cognitiva.

La culebrina tiene, en su estructura, propiedades y formas geométricas, a simple vista no se perciben, se requiere de la aplicación de los saberes del sujeto vinculados con el problema, alcanzando así una forma de reacomodar la geometría de la culebrina, pero, esa transformación existe en el pensamiento del sujeto. Tal como lo dice una alumna en siguiente fragmento:

Nuestra planeación tenía un enfoque innovador y creativo, no queríamos dar la típica clase con pizarrón y dictando a los alumnos, el propósito de nuestra planeación era enseñar la geometría y los porcentajes presentando el modelo de la culebrina, para nosotros es muy importante enseñar de la manera más clara y precisa, construir con sus propias manos una culebrina se daban cuenta de conceptos que estaban ahí pero no los veían como son los ángulos y congruencia se les permitió un diseño libre con uno o más colores para que no sientan restricciones y dejen llevarse en la creatividad. (IM/13/04/2024)

Éste tiene los saberes y las formas de explicar la síntesis que ha construido

en la culebrina ahora llamada instrumento culebrina, porque dejó de ser un artefacto, dejó de ser un objeto simple sin sentido para el estudiante y, pasó a un estado cognitivo donde el estudiante puede mostrar la ubicación precisa de propiedades y formas matemáticas que se han asimilado, acomodado y forman parte de sus estructuras cognitivas. Tal como se mostró en un diálogo cuando la maestra le preguntaba sobre los porcentajes en la recuperación de la experiencia:

Estudiante 1: El color verde tiene 50% y cada uno tiene 25% (25:54) tomando la 50% (25:57) entonces vamos a hacer ya la colorida (26:01) la colorida es amarilla y azul (26:07) el suyo se llama Mr. Green.

Maestra J: ¿Por qué? (26:20)

Estudiante 1: porque tiene 3 colores (26:22) porque si el 100% lo dividimos entre 3 (26:26) nos da 33.3 (26:28) o sea que es igual a 99.9 (26:32)

(IM/13/04/2024)

El futuro docente tiene la experiencia geométrica y la experiencia docente que, al integrarlas construye formas explicativas para compartir sus construcciones, por medio de su pensamiento creativo, analítico y sintético, éstos le permiten poder describir, las formas cognitivas de su pensamiento en torno a un problema geométrico y acomodarlo de manera didáctica a las necesidades de sus estudiantes con el propósito de acompañarle en su aprendizaje. Cómo fue al desarrollar la clase, los estudiantes utilizaron:

la ayuda personal a algunos estudiantes que tuvieron dudas en algunos pasos a desarrollar, por esta circunstancia uno de nosotros tuvimos que ir a ese equipo o alumno para ayudarles a cómo llevar a cabo el proceso (IG2/14/04/2024).

Por otro lado, otro alumno decide integrar a sus pares:

Al momento de estar explicando cómo se tiene que desarrollar la culebrina a los alumnos muchos de ellos estuvieron al nivel de nuestra explicación, es decir, a nuestra propia velocidad; pero aquellos

que ya tengan experiencia de realizar este tipo de manualidades, siguieron uno o dos pasos hacia adelante de nosotros, cosa que le vimos un lado positivo, porque hicimos participar a esos estudiantes para que expliquen a sus compañeros (IJ1/17/03/2024).

Lo que complementa que las matemáticas se desarrollan en equipo con ayuda mutua al compartir en el estudio de clase las experiencias, permite relacionar la práctica docente con las situaciones de la vida escolar y comunitaria. La comunicación grupal y personalizado de los estudiantes mediante seguimiento permanente, lo que provoca atenderlo cuando lo necesiten, el tener tiempo para contestar las dudas y requerimientos, no solo cuando el estudiante necesita aclaraciones, sino ofrecer el apoyo continuado con consejos, técnicas de estudios, conversaciones personalizadas sobre dificultades que se presenten para alentar, motivar y mejorar el rendimiento de los estudiantes. Al respecto se rescata un fragmento estudiante escribe en el informe:

los docentes encargados nos aconsejaron algunas partes muy importantes en la que podemos mejorar; por ejemplo, en alzar más la voz al momento de dictar instrucciones o comentarios, también tener un mayor control de grupo; así como, medir los tiempos correctamente el tener que desarrollar completamente la planeación y los temas que se quieren abarcar en esta misma (IG2/14/04/2024).

### ***Las matemáticas y la conexión emocional***

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas muestran conexión emocional al mostrar comprensión y apoyo sintiendo la confianza de despejar dudas que se generen en la clase, por ello "la comunicación clara y comprensible hace fomentar la participación y crear un ambiente de armonía donde todos aprenden de todos, el cortar las participaciones o decirles que están mal hace que ya no quieren participar más por lo que se tiene que saber cómo manejar bien cada situación". En este caso, la experiencia de la culebrina despertó en los estudiantes la ética y la corresponsabilidad del maestro y dar lo mejor en cada práctica, así lo menciona:

yo soy la responsable de liderar a un grupo de ciudadanos que en unos años serán ellos quienes ayuden a los más pequeños

me hace dar lo mejor de mí, aunque me falta mucho camino por recorrer y aprender me siento capaz de asumir esta gran y bonita responsabilidad, me gusta pensar que no existe estudiante flojo si no maestro que no sabe potenciar su máximo y si aunque existen un sin fin de barreras que están fuera de nuestro alcance creo firmemente en poder cambiar algo en alguien así sea mínimo para los demás. (IM/13/04/2024).

Los fragmentos anteriores revelan reflexiones de los estudiantes sobre el proceso de construcción de ideas, conocimientos, aprendizajes en diálogo y respeto mutuo de sus compañeros, maestros y de los docentes de secundaria que retroalimentaron y enriquecieron el proceso individual que busca la auto-reflexión en las prácticas e identifique sus avances, dificultades para plantear retos de aprendizaje. Lo que genera el intercambio de ideas con los compañeros y docentes e ir más allá del contenido curricular identificado en los primeros ejercicios de reflexión que se trata en la clase.

## **Conclusiones**

El futuro docente construye explicaciones fáciles de ser comprendidas donde la geometría abstracta y oculta para los ojos, se transforman en susceptibles de la visión cognitiva donde el pensamiento analiza y sintetiza desde la creativa y por medio de explicaciones que describen paso a paso la matemática y los momentos del pensamiento matemático.

El Estudio de Clase es la metodología, que posibilita la conformación de un grupo de interés para conformar una comunidad de aprendizaje, donde se aprende y se enseña en diálogo entre iguales. Se prioriza el acompañamiento entre el formador y los futuros docentes en los espacios práctica profesional en las escuelas, como parte de la construcción y producción de saberes basados en el análisis y reflexión de la práctica docente significa un escenario donde convergen los saberes del estudiante considerando cada una de sus experiencias como un elemento por integrar en su estructura como docente en matemáticas.

La Geometría y la docencia se vinculan por medio de cada situación didáctica planeada, aplicada, evaluada y rediseñada. Este proceso representa un ciclo didáctico donde el pensamiento geométrico considera

las ideas, sus representaciones y aplicaciones en el proceso enseñanza aprendizaje. Puntualizando la forma cognitiva de cómo el estudiante en formación docente diseña una situación didáctica colocando en el centro un objeto matemático de aprendizaje, como la culebrina o papalote. En un principio de la clase se considera un artefacto, con el desarrollo de las clases basadas en una planeación y el proceso de situaciones los estudiantes le impregnan sus saberes, imaginan nuevas formas geométricas empíricas de uso, exploran y descubren nuevas propiedades del papalote y las comunican a su comunidad de aprendizaje, sus compañeros de clase.

La clase genera micro procesos de socialización donde se escucha al otro y se comprende la forma de razonar, de cómo entendió el problema, para así analizar su proceso operatorio y comprender las razones cognitivas de sus esquemas mentales generados como parte del aprendizaje. Este proceso muestra el tránsito de la culebrina de un artefacto a un instrumento, éste es la construcción cognitiva del sujeto cuando ha experimentado la aplicación de sus saberes sobre la culebrina (artefacto) en el proceso de enseñanza para contribuir en el aprendizaje de sus estudiantes de la escuela secundaria y, en cómo el estudiante en formación docente construye aprendizajes significativos sobre el artefacto para diseñar situaciones de aprendizaje, generando nuevas visiones esquemáticas mentales sobre lo que en un principio era sólo un objeto simple sin mayor sentido en la matemática pero que, con el desarrollo de procesos didácticos se construyeron experiencias donde la comunidad aprendió con la participación de todos.

## Referencias

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245–274.

Benavides, L., y Calvache, R. (2013). El estudio de clase como investigación en el aula. *Revista Docencia e Investigación Universitaria*, 2(1), 32-55.

Campo-Meneses, K. G. y García-García, J. (2021). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las conexiones matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico. *PNA* 16(1), 25-56. DOI: 10.30827/pna.v16i1.15817

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 61(1), 103-131.

Godino, Rivas, M., Castro, W., y Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. ICME 11. Morelia: ICME.

Marmolejo, E., Moreno, G. (2019). La Demostración Matemática en el Contexto Escolar. México, UAGro.

Oktaç, A., Trigueros, M. y Vargas, X. N. (2006). Understanding of Vector Spaces. A Viewpoint from APOS Theory. CD-ROM *Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Istanbul, Turkey: Turkish Mathematical Society.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the Vector Space Concept from the Viewpoint of APOS Theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112–2124.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains. París: Armand Collins.

Roa, D. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal*. Tesis de maestría, Cinvestav, México.

Secretaría de Educación Pública. (2022b). Programa del curso: Geometría plana y del espacio. Secretaría de Educación Pública.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 10, 157–176.